### CHỦ ĐỀ 1. NGUYÊN HÀM

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

**I. NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT**

**1. Nguyên hàm**

***Định nghĩa:*** Cho hàm số  xác định trên  ( là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số  được gọi là nguyên hàm của hàm số  trên  nếu  với mọi .

***Định lí:***

1) Nếu  là một nguyên hàm của hàm số  trên  thì với mỗi hằng số , hàm số  cũng là một nguyên hàm của  trên .

2) Nếu  là một nguyên hàm của hàm số  trên  thì mọi nguyên hàm của  trên  đều có dạng , với  là một hằng số.

Do đó  là họ tất cả các nguyên hàm của  trên . Ký hiệu .

**2. Tính chất của nguyên hàm**

***Tính chất 1:***  và 

***Tính chất 2:***  với  là hằng số khác .

***Tính chất 3:*** 

**3. Sự tồn tại của nguyên hàm**

***Định lí:*** Mọi hàm số  liên tục trên  đều có nguyên hàm trên .

**4. Bảng nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nguyên hàm của hàm số sơ cấp** | **Nguyên hàm của hàm số hợp** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM**

**1. Phương pháp đổi biến số**

***Định lí 1:*** Nếu  và  là hàm số có đạo hàm liên tục thì



***Hệ quả:*** Nếu  thì ta có

**2. Phương pháp nguyên hàm từng phần**

***Định lí 2:***  Nếu hai hàm số  và  có đạo hàm liên tục trên  thì



Hay



### KỸ NĂNG CƠ BẢN

- Tìm nguyên hàm bằng phương pháp biến đổi trực tiếp.

- Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số.

- Tìm nguyên hàm bằng phương pháp nguyên hàm từng phần.

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

* 1. Nguyên hàm của hàm số  là hàm số nào trong các hàm số sau?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

* 1. Hàm số  là họ nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

* 1. Họ nguyên hàm của hàm số: là

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

* 1. Nguyên hàm  của hàm số  là hàm số nào?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

* 1. Tìm nguyên hàm của hàm số 

**A.** **. B.** **.**

**C.** **. D.** **.**

* 1. Tìm nguyên hàm của hàm số .

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

* 1. Tìm nguyên hàm của hàm số .

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

* 1. Tìm nguyên hàm của hàm số .

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

* 1. Họ nguyên hàm của hàm số là

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

* 1. Nguyên hàm của hàm số  là

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

* 1. Tính . Chọn kết quả đúng:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

* 1. Tính . Chọn kết quả đúng:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

* 1. Tính . Chọn kết quả đúng

**A.**. **B.** .

**C.** . **D.** .

.

* 1. Hãy chọn mệnh đề **đúng**

**A.**. **B.**.

**C.**. **D.**.

* 1. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** . **B.** .

**D.** . **C.** .

* 1. Kết quả tính bằng

**A.**. **B.** .

**C.**. **D.**.

* 1. Kết quả bằng

**A.**. **B.** . **C.** . **D.** .

* 1. Tính  bằng

**A.**. **B.** . **C.**. **D.** .

* 1. Tính  bằng

**A.**. **B.** . **C.**. **D.** .

* 1. Kết quả tính  bằng

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**CHỦ ĐỀ 2. TÍCH PHÂN**

### KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Định nghĩa**

Cho  là hàm số liên tục trên đoạn  Giả sử  là một nguyên hàm của trên  Hiệu số  được gọi là tích phân từ *a* đến *b* (hay tích phân xác định trên đoạn  của hàm số kí hiệu là 

Ta dùng kí hiệu  để chỉ hiệu số . Vậy .

*Nhận xét*:Tích phân của hàm số  từ *a* đến *b* có thể kí hiệu bởi  hay  Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào *f* và các cận *a*, *b* mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

*Ý nghĩa hình học của tích phân*: Nếu hàm số  liên tục và không âm trên đoạn  thì tích phân là diện tích *S* của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục O*x* và hai đường thẳng  Vậy 

1. **Tính chất của tích phân**

1.  2. 

3. ( ) 4. 

5. .

### KỸ NĂNG CƠ BẢN

1. **Một số phương pháp tính tích phân**
2. **Dạng 1: Tính tích phân theo công thức**

**Ví dụ 1:** Tính các tính phân sau:

1. . b) . c) . d) .
2. **Dạng 2: Dùng tính chất cận trung gian để tính tích phân**

Sử dụng tính chất  để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

**Ví dụ 2:** Tính tích phân .

1. **Dạng 3: Phương pháp đổi biến số**
2. **Đổi biến số dạng 1**

Cho hàm số  liên tục trên đoạn Giả sử hàm số  có đạo hàm liên tục trên đoạn  và  Giả sử có thể viết  với  liên tục trên đoạn  Khi đó, ta có



**Ví dụ 3:** Tính tích phân .

1. **Đổi biến số dạng 2**

Cho hàm số  liên tục và có đạo hàm trên đoạn  Giả sử hàm số  có đạo hàm và liên tục trên đoạn  sao cho  và  với mọi  Khi đó:



**Một số phương pháp đổi biến:** Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

1. : đặt 
2. : đặt 
3. : 
4. hoặc : đặt 

**Lưu ý:** Chỉ nên sử dụng phép đặt này khi các dấu hiệu 1, 2, 3 đi với *x* mũ chẵn. Ví dụ, để tính tích phân  thì phải đổi biến dạng 2 còn với tích phân  thì nên đổi biến dạng 1.

**Ví dụ 4:** Tính các tích phân sau:

a) . b) .

1. **Dạng 4: Phương pháp tính tích phân từng phần.**

*Định lí*: Nếu  và  là hai hàm số có đạo hàm và liên tục trên đoạn  thì

,

hay viết gọn là . Các dạng cơ bản: Giả sử cần tính 

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Dạng hàm** | **P(*x*): Đa thức**  **Q(*x*):**  **hay** | **P(*x*): Đa thức**  **Q(*x*):** | **P(*x*): Đa thức**  **Q(*x*):** | **P(x): Đa thức**  **Q(x):****hay** |
| **Cách đặt** | \*  \* *dv* là Phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân | \*  \* *dv* là Phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân | \*  \* | \*  \* *dv* là Phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân |

**Thông thường nên chú ý: “Nhất log, nhì đa, tam lượng, tứ mũ”.**

**Ví dụ 5:** Tính các tích phân sau : a)  b) .

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

1. Cho hai hàm số ,  liên tục trên đoạn  và số thực  tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Cho hàm số  liên tục trên  và số thực dương . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào luôn đúng?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Tích phân  có giá trị bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho số thực  thỏa mãn , khi đó  có giá trị bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có tích phân trên đoạn  đạt giá trị bằng ?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Trong các tích phân sau, tích phân nào có giá trị **khác** ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào thỏa mãn ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Tích phân  có giá trị bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Tích phân  có giá trị bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Nếu  thì giá trị của  là

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Tích phân  có giá trị bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hàm số  và  liên tục trên đoạn  sao cho  và . Giá trị của  là

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hàm số  liên tục trên đoạn . Nếu  thì tích phân  có giá trị bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hàm số  liên tục trên đoạn . Nếu  và  thì  có giá trị bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Trong các phép tính sau đây, phép tính nào **sai**?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Cho hàm số  liên tục trên đoạn  có một nguyên hàm là hàm  trên đoạn . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai** ?

**A.** .

**B.**  với mọi .

**C.** .

**D.** Hàm số  cho bởi  cũng thỏa mãn .

1. Xét hàm số  liên tục trên  và các số thực , ,  tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Xét hai hàm số  và  liên tục trên đoạn . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

**A.** Nếu  thì .

**B.** Nếu  thì .

**C.** Nếu  thì .

**D.** Nếu  thì .

1. Cho hai hàm số  và  liên tục trên đoạn  sao cho  với mọi . Xét các khẳng định sau:

I. .

II. .

III. .

IV. .

Trong các khẳng định trên, có bao nhiêu khẳng định **sai**?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Tích phân  có giá trị bằng với giá trị của tích phân nào trong các tích phân dưới đây?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** Nếu hàm số  liên tục trên đoạn , sao cho  thì  .

**B.** Với mọi hàm số  liên tục trên đoạn , luôn có .

**C.** Với mọi hàm số  liên tục trên , ta có .

**D.** Với mọi hàm số  liên tục trên đoạn  thì .

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

**A.** Nếu  là hàm số chẵn trên  thì.

**B.** Nếu  thì  là hàm số chẵn trên đoạn  .

**C.** Nếu  thì  là hàm số lẻ trên đoạn .

**D.** Nếu  thì  là hàm số chẵn trên đoạn .

1. Giả sử  là một nguyên hàm của hàm số  trên khoảng . Khi đó  có giá trị bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hàm số  liên tục trên  và hai số thực . Nếu  thì tích phân  có giá trị bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Giả sử  là một nguyên hàm của hàm số  trên khoảng . Khi đó tích phân  có giá trị bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Giả sử hàm số  liên tục trên đoạn  thỏa mãn . Giá trị của tích phân  là

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Bài toán tính tích phân  được một học sinh giải theo ba bước sau:

I. Đặt ẩn phụ , suy ra  và

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

II. 

III. .

Học sinh này giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

**A.** Bài giải đúng. **B.** Sai từ Bước II. **C.** Sai từ Bước I. **D.** Sai ở Bước III.

1. Xét tích phân . Thực hiện phép đổi biến , ta có thể đưa  về dạng nào sau đây

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hàm số  liên tục trên đoạn . Trong các bất đẳng thức sau, bất đẳng thức nào luôn đúng?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**ĐÁP ÁN**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| D | A | B | A | A | A | C | D | C | D | B | A | D | B | B | C | C | D | B | C |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| C | A | A | A | B | D | D | D | C | B |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**CHỦ ĐỀ 3. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN**

### KIẾN THỨC CƠ BẢN

**1. Diện tích hình phẳng**

1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  liên tục trên đoạn  , trục hoành và hai đường thẳng ,  được xác định: 



1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số ,  liên tục trên đoạn  và hai đường thẳng ,  được xác định: 



**Chú ý:**

- Nếu trên đoạn , hàm số  không đổi dấu thì: 

- Nắm vững cách tính tích phân của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối

- Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường ,  và hai đường thẳng ,  được xác định: 

**2. Thể tích vật thể và thể tích khối tròn xoay**

1. Thể tích vật thể:

Gọi  là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục *Ox* tại các điểm *a* và *b*;  là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục *Ox* tại điểm , . Giả sử  là hàm số liên tục trên đoạn .



Khi đó, thể tích của vật thể *B* được xác định: 

1. Thể tích khối tròn xoay:

Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường , trục hoành và hai đường thẳng ,  quanh trục *Ox*:



**Chú ý:**

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường , trục hoành và hai đường thẳng ,  quanh trục *Oy*:



- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường ,  và hai đường thẳng ,  quanh trục *Ox*:



### B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

**I- Câu hỏi tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:**

**Những điểm cần lưu ý:**

***Trường hợp 1.*** Cho hai hàm số *f*(*x*) và *g*(*x*) liên tục trên đoạn [*a*; *b*]. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  là .

**Phương pháp giải toán**

*+*) Giải phương trình 

+) Nếu (1) vô nghiệm thì .

+) Nếu (1) có nghiệm thuộc .. giả sử  thì



**Chú ý**: Có thể lập bảng xét dấu hàm số  trên đoạn  rồi dựa vào bảng xét dấu để tính tích phân.

***Trường hợp 2.*** Cho hai hàm số *f*(*x*) và *g*(*x*) liên tục trên đoạn [*a*; *b*]. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  là . Trong đó  là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình  .

*Phương pháp giải toán*

*Bước 1.* Giải phương trình  tìm các giá trị .

*Bước 2.* Tính như trường hợp 1.

1. Công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số , liên tục trên  và hai đường thẳng ,   là:

A.. B. .

C. . D. .

1. Diện tích *S* của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số , liên tục trên  trục hoành và hai đường thẳng  cho bởi công thức:

A.  B.  C.  D. 

1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường , . (*Đơn vị diện tích*)

A.  B.  C.  D. 

1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi  là:

A. 8 B. 9 C. 12 D. 13

1. Cho hàm số  liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn . Diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của, trục hoành và hai đường thẳng ,  được tính theo công thức

A. B.  C.  D. 

1. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số  liên tục trên đoạn , trục hoành và hai đường thẳng ,  được tính theo công thức

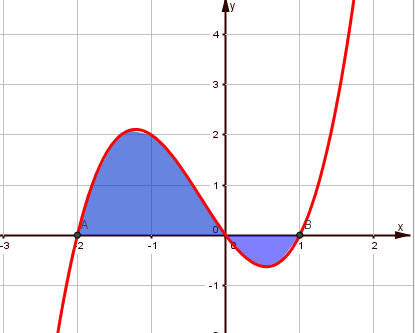
A. B.  C.  D. 

1. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị các hàm số ,  liên tục trên đoạn , trục hoành và hai đường thẳng ,  được tính theo công thức

A.  B. 

C. D. 

1. Cho đồ thị hàm số . Diện tích hình phẳng (phần tô đậm trong hình) là



A.  B. 

C.  D.

1. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số  , trục hoành và hai đường thẳng ,  là

A.  B.  C.  D. 

1. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số  , trục hoành và hai đường thẳng ,  là

A.  B.  C.  D. 

1. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số  , trục hoành và hai đường thẳng ,  là

A.  B.  C.  D. 

1. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số  , trục hoành và hai đường thẳng ,  là

A.  B.  C.  D. 

1. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số  , trục hoành và hai đường thẳng ,  là

A.  B.  C.  D. 

1. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục hoành và hai đường thẳng ,  là

A.  B.  C.  D. 

1. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số  , trục hoành và hai đường thẳng ,  là

A.  B.  C.  D. 

1. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục hoành và hai đường thẳng ,  là

A.  B.  C.  D. 

1. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số  , trục hoành và đường thẳng là

A.  B.  C.  D. 

1. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi parabol  và đường thẳng  là

A.  B.  C.  D. 

1. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số  , trục hoành và hai đường thẳng  là

A.  B.  C.  D. 

1. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số  , trục hoành và hai đường thẳng ,  là

A.  B.  C.  D. 

**II-Câu hỏi tính tính thể tích vật tròn xoay giới hạn bởi các đường:**

**Những điểm cần lưu ý:**

**. Tính thể tích khối tròn xoay:**

**Trường hợp 1.** Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường , ,  và  ***quay quanh trục Ox*** là .

**Trường hợp 2*.*** Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường ,  và  ***quay quanh trục Ox*** là .

1. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường  quanh trục ox là:

A.  B.  C.  D. 

1. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường  quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A.  B.  C.  D. 

1. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường  quay xung quanh trục *Ox*. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A.  B.  C.  D. 

1. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường ; trục *Ox* và đường thẳng  quay xung quanh trục *Ox*. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A.  B.  C.  D. 

1. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường  quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A.  B.  C.  D. 

1. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường  quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A.  B.  C.  D. 

1. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường  quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A.  B.  C.  D. 

1. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường  quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A.  B.  C.  D. 

1. Thể tích khối tròn xoay trong không gian Oxyz giới hạn bởi hai mặt phẳng  và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm bất kỳ là đường tròn bán kính  là:

A.  B.  C.  D. 

1. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường  quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A.  B.  C.  D. 

**I – ĐÁP ÁN**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| D | A | B | A | A | A | C | D | C | D | B | A | D | B | B | C | C | D | B | C |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| C | B | B | C | B | C | D | D | D | D |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |